

На правах рукописи

ХАЙРУЛЛИН ФАРИД САГИТОВИЧ

УДК 539.3

**ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ
НА ОСНОВЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С КОНЕЧНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого
твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Казань - 2007

Работа выполнена в Казанском государственном технологическом университете

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Гаврюшин Сергей Сергеевич

доктор физико-математических наук, профессор
Капустин Сергей Аркадьевич

доктор физико-математических наук, профессор
Артюхин Юрий Павлович

Ведущая организация: Саратовский государственный технический
университет

Защита состоится «25» октября 2007 года в 14 часов 30 минут на
заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском
государственном университете по адресу:
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д.18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ им. Н.И.
Лобачевского.

Автореферат разослан « » 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кан. физ.-мат. наук, доцент



А.А. Саченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В современной теории оболочек достигнуты значительные успехи как в развитии теоретических основ, так и в решении конкретных задач. Однако, как отмечается в обзорной статье Григоренко Я.М., Савулы Я.Г., Мухи И.С., «запросы практики в исследовании задач механики деформирования оболочек удовлетворяются еще не полностью». Задачи определения напряженно-деформированного состояния оболочек сложной геометрии «являются наименее исследованными. Разработка методов их решения является одной из важных и актуальных проблем теории оболочек».

Анализ существующих методов расчета показывает, что, хотя и разработаны различные методы расчета тонкостенных конструкций сложной формы, однако универсального метода, применимого для любого случая, нет. Каждый из этих методов имеет свои положительные стороны и недостатки, свой круг решаемых задач. Даже такой универсальный метод, как метод конечных элементов, нельзя считать полностью сформированным. Как отмечено в монографии А.И. Голованова и соавторов, несмотря на большое количество работ по методу конечных элементов и множество предложенных в этих работах конечных элементов, «лишь ограниченное количество их действительно эффективно в расчетах тонких непологих оболочек».

При использовании метода конечных элементов уточнение решения может быть произведено или в результате увеличения количества конечных элементов (сгущение сетки) или в результате увеличения порядка аппроксимирующих функций на элементе. Как показывают результаты численных экспериментов, более эффективным является второй способ, который позволяет получить хорошую точность решения на редких сетках. Однако при использовании функций высокой степени аппроксимации в узловых точках требуется задавать производные высоких порядков, например, производные второго порядка. Это приводит к усложнению формулировки и выполнения граничных условий, а при расчете составных оболочек создает проблемы с выполнением условий сопряжения на изломе срединной поверхности оболочки. В связи с этим является целесообразным разработка методов расчета тонкостенных конструкций, которые с одной стороны позволяли бы использовать аппроксимирующие функции высокой степени, с другой стороны не требовали выполнения граничных условий для производных высоких порядков.

При численной параметризации срединной поверхности оболочки аппроксимирующая функция должна удовлетворять определенным требованиям гладкости функции. Например, если используется классическая теория оболочек, то необходимо обеспечить непрерывность функции класса

$C^{(2)}$. Такого рода непрерывность могут обеспечить кубические сплайн аппроксимации. Однако в этом случае необходимо задавать значения производных в граничных точках, что сделать с достаточной точностью не очень просто, а в некоторых случаях вообще невозможно.

Для достижения необходимой точности при расчете толстых оболочек необходимо учитывать нелинейный характер изменения перемещений по толщине оболочки. Этого можно добиться, если использовать, например, трехмерные конечные элементы, основанные на уравнениях теории упругости. При использовании же для расчета таких конструкций соотношений теории оболочек количество неизвестных параметров, определяющих искомые функции, будет зависеть от количества слоев, на которые разбивается оболочка, что усложняет решение задачи. В связи с этим является целесообразным разработка методов расчета, которые учитывали бы истинную картину распределения напряженно-деформированного состояния по толщине оболочки, но в то же время позволяли использовать уравнения классической теории оболочек.

Исходя из выше изложенного можно утверждать, что в настоящее время является актуальной разработка методов расчета тонкостенных конструкций сложной формы, численных методов параметризации срединных поверхностей оболочек сложной геометрии, методов расчета толстых однородных и многослойных оболочек.

Целью работы является разработка вариационных методов определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций, основанных на использовании функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации, позволяющих производить расчеты тонких и толстых оболочек сложной формы, криволинейных стержней, составных оболочек, оболочечно-стержневых конструкций.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- построить аппроксимирующие функции с конечными носителями иерархического типа;
- разработать вариационный метод определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек сложной формы;
- разработать численный метод параметризации срединных поверхностей и граничных линий оболочек, заданных совокупностью дискретных точек;
- разработать математические модели деформированного состояния составных оболочек, стержневых систем, конструкций, состоящих из оболочечных и стержневых элементов, толстых однородных и многослойных оболочек;

- создать пакеты компьютерных программ по расчету тонких и толстых оболочек сложной формы, стержневых систем, оболочечно-стержневых конструкций.

Методы исследования основаны на использовании определяющих уравнений теории оболочек и стержней типа Тимошенко, вариационных принципов механики деформируемого твердого тела, методов вычислительной математики.

Научная новизна работы заключается в следующем:

Предложен метод построения аппроксимирующих функций с конечными носителями. Отличительная особенность и новизна метода заключаются в том, что в пределах некоторой подобласти в аппроксимирующих функциях, путем соответствующего преобразования системы координат и выбора вида этих функций, разделяются параметры, определяющие искомые функции внутри подобласти и на ее границах. Это позволяет выполнять кинематические условия стыковки подобластей, на которые разбивается оболочка.

С использованием данных функций на основе вариационного метода определяются напряженно-деформированные состояния оболочек сложной формы, составных оболочек, стержневых систем, оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, и оболочечно-стержневых конструкций.

Предложены алгоритмы построения аппроксимирующих сглаживающих функций, заданных совокупностью точек, используемых для параметризации срединных поверхностей и граничных линий оболочек. При решении задачи используются функционалы, включающие только первые производные от искомых функций.

Разработан вариационный метод расчета толстых однородных и многослойных оболочек, основанный на разбиении оболочек на слои и использовании для описания напряженно-деформированного состояния слоев теории оболочек средней толщины с учетом обжатия. Предложенный алгоритм решения задачи позволяет реализовать подход типа метода суперэлемента для расчета толстых оболочек.

Достоверность и обоснованность научных положений и результатов обеспечивается корректным применением законов и определяющих уравнений механики деформируемого твердого тела, использованием для решения краевых задач строгих математических методов, а также многочисленными сравнениями результатов расчетов с известными теоретическими и экспериментальными данными и хорошей согласованностью с ними.

Практическую ценность диссертационной работы составляют описанные в работе способы построения аппроксимирующих функций с конечными носителями, основанные на вариационных методах математические модели деформированного состояния однородных и многослойных оболочек,

алгоритмы построения сглаживающих функций, созданные на основе этих методов пакеты компьютерных программ, результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований.

Предложенный в работе метод расчета конструкций является достаточно универсальным и по эффективности сравним с методом конечных элементов.

Часть из разработанных программ внедрена в заинтересованные организации, что подтверждено соответствующими актами. Работа, связанная с расчетом пространственных стержневых систем, внедрена в учебный процесс.

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

- метод построения аппроксимирующих функций с конечными носителями иерархического типа, удовлетворяющих условиям согласованности и полноты;
- вариационные методы определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек сложной формы, составных оболочек, стержневых систем и оболочечно-стержневых конструкций;
- алгоритмы построения аппроксимирующих сглаживающих функций, заданных совокупностью точек, используемых для описания линий и поверхностей;
- методика расчета толстых однородных и многослойных оболочек, основанная на разбиении оболочек на слои и использовании для описания напряженно-деформированного состояния слоев теории оболочек средней толщины с учетом обжатия;
- представленные в диссертации результаты решения задач.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались:

на III Всесоюзной конференции «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов» (Казань, 1988 г.);

на III Всесоюзном научно-техническом совещании «Динамика и прочность автомобиля» (Москва, 1988 г.);

на Республиканских научно-технических конференциях «КамПИ-КамАЗ» (Набережные Челны, 1988 г., 1990 г.);

на Всесоюзной научно-технической конференции «Повышение качества и надежности продукции программного обеспечения ЭВМ» (Куйбышев, 1990 г.);

на II Республиканской научно-технической конференции «Динамика и прочность мобильных машин» (Кутаиси, 1990 г.);

на Республиканских научно-технических конференциях «Механика машиностроения» (Набережные Челны, 1987 г., 1995 г., 1997 г.);

на Международной конференции «Актуальные проблемы механики оболочек» (Казань, 2000 г.);

на Международной научно-технической конференции «Техно-экономические проблемы промышленного производства» (Набережные Челны, 2000 г.);

на выездном заседании головного совета «Машиностроение» (Набережные Челны, 2001 г.);

на межвузовских конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2001 - 2003 г.);

на Международной научной конференции «Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных конструкций сложной формы» (Москва, 2002 г.);

на Всесоюзных конференциях по теории оболочек и пластин (Казань, 1991 г., Нижний Новгород, 1994 г., Казань, 1996 г., Нижний Новгород, 1999г., Нижний Новгород, 2002 г.);

на XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». (Санкт-Петербург, 2003 г.);

на XVIII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (Казань, 2005 г.);

на IX Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 19 статьях автора.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и библиографического списка, включающего 329 наименований. Изложено на 267 страницах машинописного текста, содержит 33 таблицы и 60 рисунков.

Диссертационная работа выполнена на кафедре динамики и прочности автомобильных конструкций Камского политехнического института и на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов Казанского государственного технологического университета.

Тема диссертации выполнялась в соответствии с плановыми темами исследований Камского политехнического института и Казанского государственного технологического университета.

Автор считает своим долгом выразить благодарность профессору М.Н. Серазутдинову, общение и совместная работа с которым определило некоторые из научных направлений, представленных в диссертации, способствовало формированию научного мировоззрения диссертанта.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится постановка задачи и краткая аннотация содержания работы, отражена научная новизна диссертационной работы, дается краткий обзор работ, посвященных затронутым в диссертации вопросам.

В первой главе предлагается метод построения аппроксимирующих функций с конечными носителями иерархического типа. Отличительная особенность метода заключается в том, что в пределах некоторой криволинейной четырехугольной или треугольной подобласти оболочки в аппроксимирующих функциях, путем соответствующего преобразования системы координат и выбора этих функций, разделяются параметры, определяющие искомые функции внутри подобласти и на ее границах. Причем, аппроксимирующие функции на границах области являются инвариантными величинами относительно преобразования системы координат. Это позволяет выполнять кинематические условия стыковки этих подобластей и удовлетворять геометрическим граничным условиям.

В четырехугольной подобласти Ω_k (рис.1) с гладкими граничными линиями γ_i вводится локальная система координат β_1, β_2 , которая связана с системой координат α_1, α_2 следующим образом:

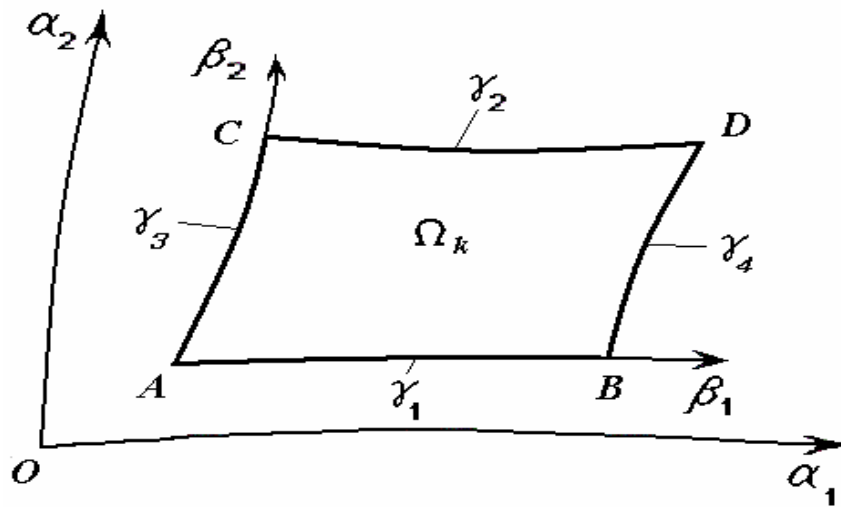


Рис.1

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = & f_3(g_3(s_3^* \beta_2))(1 - \beta_1) + f_4(g_4(s_4^* \beta_2))\beta_1 + \\
 & + \left[g_1(s_1^* \beta_1) - \alpha_{11}(1 - \beta_1) \quad - \alpha_{12}\beta_1 \right] (1 - \beta_2) + \\
 & + \left[g_2(s_2^* \beta_1) - \alpha_{13}(1 - \beta_1) \quad - \alpha_{14}\beta_1 \right] \beta_2, \\
 \alpha_2 = & f_1(g_1(s_1^* \beta_1))(1 - \beta_2) + f_2(g_2(s_2^* \beta_1))\beta_2 +
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$+ \left[g_3(s_3^* \beta_2) - \alpha_{21}(1 - \beta_2) \quad -\alpha_{23}\beta_2 \right] (1 - \beta_1) + \\ + \left[g_4(s_4^* \beta_2) - \alpha_{22}(1 - \beta_2) \quad -\alpha_{24}\beta_2 \right] \beta_1,$$

где α_1, α_2 - ортогональная криволинейная система координат в линиях главной кривизны; $\alpha_2 = f_i(\alpha_1)$, $\alpha_1 = f_j(\alpha_2)$ - уравнения граничных линий;

$$s_i = q_i(\alpha_1) \equiv \int_{\alpha_{1,2i-1}}^{\alpha_1} \sqrt{A_{1i}^2 + A_{2i}^2 f_i^2(\alpha_1)} d\alpha_1, \quad s_j = q_j(\alpha_2) \equiv \int_{\alpha_{2,j}}^{\alpha_2} \sqrt{A_{1j}^2 + A_{2j}^2 f_j^2(\alpha_2)} d\alpha_2 -$$

дуговые координаты; $s_i^* = q_i(\alpha_{1,2i})$, $s_j^* = q_j(\alpha_{2,j})$ - длины дуг кривых γ_i, γ_j ; $\alpha_1 = g_i(s_i)$, $\alpha_2 = g_j(s_j)$ - функции обратные к функциям $s_i = q_i(\alpha_1)$, $s_j = q_j(\alpha_2)$ $j = i + 2$, $i = \overline{1,2}$; A_{1i}, A_{2i} - коэффициенты первой квадратичной формы, вычисленные на линиях γ_i ; $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ - координаты угловых точек; $i = \overline{1,4}$; $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$.

Система координат β_1, β_2 введена таким образом, что на граничных линиях γ_i уравнения (1) переходят в уравнения этих линий. Причем, на линиях γ_i координатная сетка является равномерной, т.к. координаты β_1, β_2 на этих линиях являются дуговыми безразмерными координатами.

В подобласти Ω_k искомые функции аппроксимируются функциями, заданными в системе координат β_1, β_2 , следующим образом:

$$U = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn}^k t_m(\beta_1) t_n(\beta_2), \quad (2)$$

где $U = \{u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2\}^T$ - вектор перемещений и углов сдвига подобласти Ω_k , $D_{mn}^k = \{D_{mn1}^k, D_{mn2}^k, D_{mn3}^k, D_{mn4}^k, D_{mn5}^k\}^T$ - вектор неизвестных постоянных.

Функции формы имеют вид

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, \quad t_2(\beta_1) = \beta_1, \quad t_m(\beta_1) = t_1(\beta_1) [t_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}). \quad (3)$$

Перемещения граничных линий подобласти Ω_k определяются по формулам:

$$U(\gamma_i) = \sum_{m=1}^M D_{mi}^k t_m(\beta_1), \quad U(\gamma_{i+2}) = \sum_{n=1}^N D_{in}^k t_n(\beta_2) \quad i = \overline{1,2}. \quad (4)$$

В угловых точках A, B, C, D

$$U(A) = D_{11}^k, U(B) = D_{21}^k, U(C) = D_{12}^k, U(D) = D_{22}^k,$$

т.е. параметры $D_{11}^k, D_{21}^k, D_{12}^k, D_{22}^k$ являются значениями искоемых функций в угловых точках.

Из формул (4) следует, что на граничных линиях γ_i искоемые функции определяются одномерными полиномами, являющимися инвариантными величинами относительно преобразования системы координат. Это обеспечивает непрерывность искоемых функций при переходе из одной подобласти на другую и позволяет легко выполнять геометрические граничные условия и условия стыковки искоемых функций на границах подобластей Ω_k .

Например, если граница γ_2 подобласти Ω_k совпадает с границей γ_3^* подобласти Ω_k^* , то для обеспечения непрерывности вектора перемещений U достаточно выполнить условия

$$D_{m2}^k = D_{1m}^{k*}, \quad m = \overline{1, M}, \quad N = M.$$

Если на границе γ_1 подобласти Ω_k заданы граничные условия $U = 0$, то необходимо положить

$$D_{m1}^k = 0, \quad m = \overline{1, M}.$$

В качестве частных случаев из функции (2) можно получить известные аппроксимирующие функции. Например, при значениях $N=M=2$, если перегруппировать слагаемые и ввести новые обозначения, то получается пробная функция для билинейной аппроксимирующей функции:

$$U = d_1 + d_2\beta_1 + d_3\beta_2 + d_4\beta_1\beta_2,$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= D_{11}^k, \quad d_2 = D_{21}^k - D_{11}^k, \\ d_3 &= D_{12}^k - D_{11}^k, \quad d_4 = D_{11}^k - D_{12}^k - D_{21}^k + D_{22}^k. \end{aligned}$$

При значениях $N=M=3$ имеем пробную функцию для квадратичной аппроксимирующей функции:

$$\begin{aligned} U &= d_1 + d_2\beta_1 + d_3\beta_2 + d_4\beta_1\beta_2 + d_5\beta_1^2 + d_6\beta_2^2 + d_7\beta_1^2\beta_2 + \\ &+ d_8\beta_1\beta_2^2 + d_9\beta_1^2\beta_2^2. \end{aligned}$$

Если в этом выражении отбросить три последних слагаемых, то получается пробная функция для биквадратичной аппроксимирующей функции.

При значениях $N=M=4$ получается кубическая аппроксимирующая функция

$$U = d_1 + d_2\beta_1 + d_3\beta_2 + d_4\beta_1^2 + d_5\beta_1\beta_2 + d_6\beta_2^2 + d_7\beta_1^3 + d_8\beta_1^2\beta_2 + \\ + d_9\beta_1\beta_2^2 + d_{10}\beta_2^3 + d_{11}\beta_1^3\beta_2 + d_{12}\beta_1\beta_2^3 + d_{13}\beta_1^2\beta_2^2 + d_{14}\beta_1^3\beta_2^2 + \\ + d_{15}\beta_1^2\beta_2^3 + d_{16}\beta_1^3\beta_2^3.$$

В частности, отметим, что эта пробная функция используется в элементе Галлагера для прямоугольной области для аппроксимации прогиба оболочки. Если в этой формуле отбросить четыре последних слагаемых, то получится пробная функция для аппроксимации прогиба оболочки, предложенный Коннором и Бреббиа.

Анализ формулы (2) показывает, что она является полной при любых значениях N и M .

Аналогичным образом строятся аппроксимирующие функции для треугольных подобластей Ω'_k и Ω''_k , представленных на рис.2.

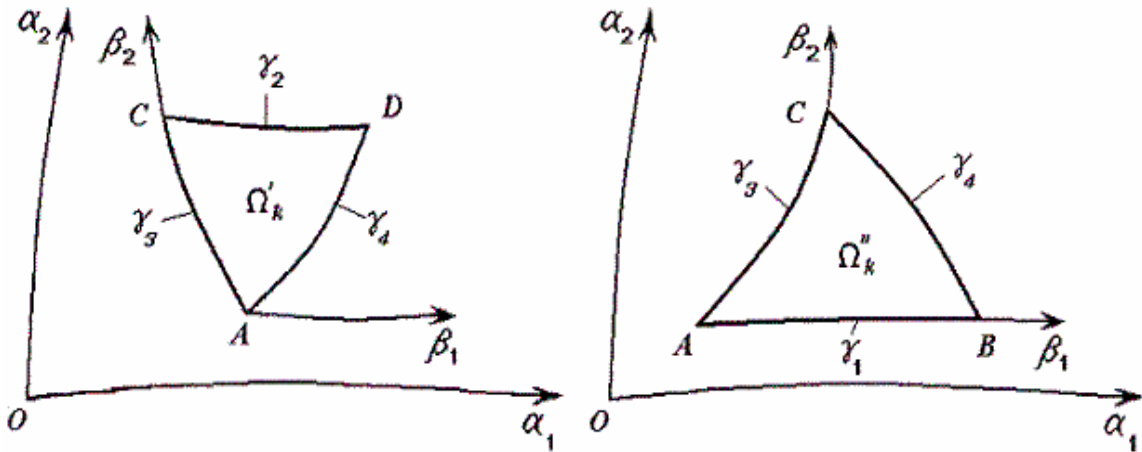


Рис.2

Из соотношений (1) путем предельного перехода находим при $B \rightarrow A$ для треугольной подобласти Ω'_k

$$\alpha_1 = f_3(g_3(s_3^*\beta_2))(1-\beta_1) + f_4(g_4(s_4^*\beta_2))\beta_1 + \\ + \left[g_2(s_2^*\beta_1) - \alpha_{13}(1-\beta_1) - \alpha_{14}\beta_1 \right] \beta_2, \\ \alpha_2 = \alpha_{21}(1-\beta_2) + f_2(g_2(s_2^*\beta_1))\beta_2 + \\ + \left[g_3(s_3^*\beta_2) - \alpha_{21}(1-\beta_2) - \alpha_{23}\beta_2 \right] (1-\beta_1) + \\ + \left[g_4(s_4^*\beta_2) - \alpha_{22}(1-\beta_2) - \alpha_{24}\beta_2 \right] \beta_1, \quad (5)$$

при $D \rightarrow C$ для подобласти Ω_k''

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= f_3(g_3(s_3^*\beta_2))(1-\beta_1) + f_4(g_4(s_4^*\beta_2))\beta_1 + \\ &\quad + \left[g_1(s_1^*\beta_1) - \alpha_{11}(1-\beta_1) - \alpha_{12}\beta_1 \right] (1-\beta_2), \\ \alpha_2 &= f_1(g_1(s_1^*\beta_1))(1-\beta_2) + \alpha_{23}\beta_2 + \\ &\quad + \left[g_3(s_3^*\beta_2) - \alpha_{21}(1-\beta_2) - \alpha_{23}\beta_2 \right] (1-\beta_1) + \\ &\quad + \left[g_4(s_4^*\beta_2) - \alpha_{22}(1-\beta_2) - \alpha_{24}\beta_2 \right] \beta_1.\end{aligned}\quad (6)$$

Для получения аппроксимирующих функций достаточно в формуле (2) положить для подобласти Ω_k'

$$D_{11}^k = D_{21}^k, \quad D_{m1}^k = 0, \quad m = \overline{2, M}, \quad (7)$$

для подобласти Ω_k''

$$D_{12}^k = D_{22}^k, \quad D_{m2}^k = 0, \quad m = \overline{2, M}. \quad (8)$$

Таким образом, получены аппроксимирующие функции с конечными носителями для криволинейных четырехугольных и треугольных подобластей иерархического типа, удовлетворяющие условиям согласованности и полноты.

Предложенные четырехугольные и треугольные элементы имеют одинаковую структуру, что позволяет автоматически выполнять условия стыковки этих элементов. Для этого достаточно в аппроксимирующих функциях задать одинаковые порядки в полиномах, определяющих перемещения на линии стыковки рассматриваемых элементов.

Рассмотрим деформирование тонкой оболочки, срединная поверхность которой имеет сложную форму в плане. Пусть срединная поверхность оболочки задана в гауссовой ортогональной системе координат в линиях главной кривизны. Перемещения и деформации малы, материал оболочки изотропен, справедлив закон Гука.

Предположим, что срединная поверхность Ω оболочки может быть разбита на подобласти видов Ω_k , Ω_k' и Ω_k'' (рис.1,2). В дальнейшем для упрощения записей под подобластью Ω_k будем подразумевать все три вида введенных подобластей.

Для определения напряженно-деформированного состояния оболочек используется вариационный принцип Лагранжа, на основании которого

$$\delta E = \sum_{k=1}^K \delta E_k(U) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} (\delta \Pi_k - \delta' W_k) d\Omega = 0, \quad (9)$$

где E – полная энергия оболочки, E_k – полная энергия подобласти Ω_k ; P_k , $\delta'W_k$ – соответственно удельная потенциальная энергия деформации и вариация работы внешних сил на единице площади подобласти Ω_k .

Представляя для каждой подобласти Ω_k решение в виде (2), подставляя аппроксимирующие функции в вариационное уравнение (9), удовлетворяя соответствующим граничным условиям и условиям стыковки подобластей, после численного интегрирования по некоторой квадратурной формуле получается система линейных уравнений относительно неизвестных постоянных D_{mn}^k :

$$[K] D = P, \quad (10)$$

где $[K]$ – матрица жесткости оболочки, D – вектор неизвестных постоянных, P – вектор правой части, учитывающий действие внешних нагрузок.

Таким образом, основные соотношения и искомые функции задаются в системе координат α_1, α_2 , в которой определяющие уравнения являются наиболее простыми. В криволинейной же системе координат β_1, β_2 производится аппроксимация искомых функций (2) и вычисление интегралов, входящих в полную энергию оболочки.

Так как параметры, определяющие перемещения внутренних точек подобласти, не входят в условия стыковки подобластей и не используются для удовлетворения граничных условий, то при формировании локальной матрицы жесткости подобласти эти параметры можно исключать. Следовательно, в глобальной матрице жесткости оболочки будут содержаться только те неизвестные постоянные, которые определяют перемещения граничных линий подобластей Ω_k .

Рассматриваются вопросы создания алгоритма решения и численной реализации задачи. Проводится проверка метода на большом количестве тестовых задач.

В таблице 1 приведены проценты расхождения максимального прогиба w , максимального напряжения σ в центре пластины и максимального напряжения σ_1 в центре длинной стороны прямоугольной защемленной

Таблица 1

b/a	1			2		
N=M	Δw (%)	$\Delta \sigma$ (%)	$\Delta \sigma_1$ (%)	Δw (%)	$\Delta \sigma$ (%)	$\Delta \sigma_1$ (%)
3	5.2	77.1	37.6	12.5	78.2	16.8
4	0.2	20.1	9.7	3.6	10.6	4.4
5	0.6	2.6	1.2	0	3.2	0.6
6	0.6	1.2	0	0.7	0.8	0

пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, от соответствующих значений, полученных аналитическим методом. Результаты получены для следующих параметров пластины: $h=1\text{см}$, $a=b=100\text{см}$, $E=200\text{ГПа}$, $\nu=0.3$, $q=0.1\text{кН/м}^2$.

Одним из тестовых задач для проверки конечных элементов непологих оболочек является задача об изгибе круговой замкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил F . Вследствие симметрии рассматривается четверть оболочки. Результаты даны для следующих числовых параметров: $L=26.2\text{ см}$, $R=12.5\text{ см}$, $R/h=52.5$, $F=453\text{ н}$, $E=74\text{ ГПа}$, $\nu=0.3125$, где L – длина оболочки.

В таблице 2 приводятся значения максимального прогиба w_{\max} для различных вариантов разбиения оболочки и различных значений порядков аппроксимирующих функций, а также результаты других авторов. В скобках дается число степеней свободы системы.

Таблица 2

Сетка КЭ	Ashwell D.G., Sabir A.B.	Dawe D.J.	$N=M=5$	$N=M=6$	$N=M=7$
1×1	0.264 (20)	0.269 (72)	0.250(100)	0.279 (120)	0.285 (140)
2×2	0.280 (45)	0.284 (162)	0.284 (285)	0.286 (345)	
4×4	0.287(125)	0.288 (450)			
6×6	0.288(245)				
8×8	0.289(405)				

Конечно-элементное решение дает $w_{\max}=0.289\text{см}$.

Численные эксперименты показывают, что при использовании данного метода возникновение таких явлений, как «заклинивание» решения, ложная осцилляция и т.д., происходит при значительно меньших толщинах оболочки, чем при использовании метода конечных элементов. Например, для выше рассмотренной квадратной пластины даже при относительной толщине $h/a=10^{-4}$ наблюдается хорошая сходимость решения как по прогибам, так и по напряжениям.

Показано, что предложенный метод позволяет рассматривать конструкции, у которых один геометрический размер подобласти Ω_k значительно меньше другого, т.е. можно рассчитывать оболочки с тонкими инородными включениями, с «вырождающейся» областью, можно моделировать различные граничные условия.

Предложенный метод является достаточно универсальным и удобным в реализации, позволяет получать хорошую точность решения на малом количестве подобластей, на которые разбивается срединная поверхность оболочки.

Во второй главе излагаются алгоритмы построения аппроксимирующих сглаживающих функций, которые используются для описания линий и поверхностей, заданных совокупностью точек.

Для построения сглаживающих функций предлагается использовать функционал, в котором с механической точки зрения в основе условия «изгибания» поверхности лежит теория оболочек типа Тимошенко. Это приводит к уменьшению порядка производных в функционале. В качестве сглаживающих функций берутся функции, предложенные в предыдущей главе для аппроксимации компонентов перемещений оболочек и граничных линий.

Пусть в криволинейной системе координат α_1, α_2 требуется построить аппроксимирующую функцию $\alpha_2 = f(\alpha_1)$, значения которой $\alpha_{2j} \equiv f_j, j = \overline{1, J}$ определены с некоторой погрешностью в точках $a = \alpha_{11} < \alpha_{12} < \dots < \alpha_{1J} = b$.

Для построения одномерной функции $f(\alpha_1)$ предлагается использовать функционал

$$\begin{aligned} \Phi_T(f, \varphi) = \int_a^b \left[\left(\frac{1}{A_1^0 A_2^0} \frac{d(A_2^0 \varphi)}{d\alpha_1} \right)^2 + p \left(\frac{1}{A_1^0} \frac{df}{d\alpha_1} - \varphi \right)^2 \right] A_1^0 d\alpha_1 + \\ + \sum_{j=1}^J p_j [f(\alpha_{1j}) - f_j]^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\varphi(\alpha_1)$ - функция, аппроксимирующая первую производную от искомой функции; p, p_j - весовые коэффициенты; A_i^0 - параметры Ляме, определенные на линии отсчета $\alpha_2 = 0$.

В функционале (11) скомбинированы интерполяционные условия прохождения кривой $\alpha_2 = f(\alpha_1)$ вблизи заданных точек и условие минимального «изгибания» кривой. Весовые коэффициенты p_j определяются из условия выполнения неравенства:

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J [f(\alpha_{1j}) - f_j]^2 < \varepsilon,$$

где ε - малое положительное число.

Так как функционал $\Phi_T(f, \varphi)$ с точностью до множителей совпадает с полной энергией изгиба балки, то коэффициент p можно определить по формуле $p = \frac{k_0 G A}{E I}$, где E, G - модули упругости и сдвига балки; A, I -

площадь и момент инерции поперечного сечения балки; k_0 - геометрический параметр, зависящий от формы поперечного сечения балки.

Аппроксимирующие функции представляются в виде

$$f(\alpha_1) = \sum_{k=1}^K b_{1k} t_k(\beta), \quad \varphi(\alpha_1) = \sum_{k=1}^K b_{2k} t_k(\beta), \quad (12)$$

где b_{1k}, b_{2k} - неизвестные постоянные.

В некоторых случаях бывает проще, а иногда и целесообразнее задавать координаты узловых точек не от оси $\alpha_2 = 0$, а от некоторой заданной линии отсчета $\alpha_2 = f_0(\alpha_1)$, уравнение которой имеет аналитический вид и которая по форме похожа на искомую кривую. При этом точность решения значительно улучшается.

Если для срединной поверхности Ω оболочки можно ввести поверхность отсчета Ω_0 таким образом, чтобы прямая, проведенная по нормали \bar{n}_o к Ω_0 , пересекала поверхность Ω не более одного раза, то положение точки на срединной поверхности оболочки определяется по формуле $\bar{r} = \bar{r}_o + \zeta \bar{n}_o$, где $\bar{r}_o = \bar{r}_o(\alpha_1, \alpha_2)$ - радиус-вектор точки M_0 на поверхности отсчета Ω_0 ; $\bar{r} = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ - радиус-вектор точки M на срединной поверхности оболочки Ω , лежащей на нормали \bar{n}_o ; $\zeta = \zeta(\alpha_1, \alpha_2)$ - расстояние между точками M и M_0 .

Для построения функции $\zeta(\alpha_1, \alpha_2)$, заданной дискретно, предлагается использовать функционал:

$$\begin{aligned} \Phi^T(\zeta, \psi_1, \psi_2) = \iint_{\Omega_0} & \left\{ \left[\frac{1}{A_{01}A_{02}} \frac{\partial(A_{02}\psi_1)}{\partial\alpha_1} \right]^2 + \left[\frac{1}{A_{01}A_{02}} \frac{\partial(A_{01}\psi_2)}{\partial\alpha_2} \right]^2 + \right. \\ & \left. + p \left(\psi_1 + \frac{1}{A_{01}} \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha_2} \right)^2 + p \left(\psi_2 + \frac{1}{A_{02}} \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha_1} \right)^2 \right\} d\Omega_0 + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^J p_j^o \left[\zeta(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}) - \zeta_j \right]^2, \quad (13)$$

где $\zeta_j = \zeta(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})$, $j = \overline{1, J}$ - значения искомой функции в заданных точках на поверхности Ω ; ψ_1, ψ_2 - функции, аппроксимирующие первые производные от искомой функции; p, p_j^o - весовые коэффициенты; A_{01}, A_{02} - параметры Ляме, вычисленные на поверхности отсчета Ω_0 .

Аппроксимирующие функции представляются в виде:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} B_{mn}^1 t_m(\beta_1) t_n(\beta_2), \\ \psi_i(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{m=1}^{M_0} \sum_{n=1}^{N_0} B_{mn}^{i+1} t_m(\beta_1) t_n(\beta_2), \quad i = \overline{2, 3} \end{aligned} \quad (14)$$

где $B_{mn}^1, B_{mn}^2, B_{mn}^3$ - неизвестные постоянные.

Система координат β_1, β_2 вводится на поверхности отсчета Ω_0 по формулам, аналогичным (1), где функции $\alpha_2 = f_i(\alpha_1)$, $\alpha_1 = f_j(\alpha_2)$ определяют прообразы граничных линий области Ω , заданные на поверхности отсчета Ω_0 . Функции $\alpha_2 = f_i(\alpha_1)$, $\alpha_1 = f_j(\alpha_2)$ могут быть заданы аналитически или численно по методу, предложенному в этой главе.

Представленные численные результаты показывают, что предложенный алгоритм позволяет строить сглаживающие функции, которые на малом количестве узловых точек позволяют получать достаточно точные решения как по первым производным от искомым функций, так и по вторым. Причем, точность решения не в узловых точках такая же, как и в узловых точках.

При использовании сплайн-функций в качестве аппроксимирующих функций для получения приемлемой точности необходимо удовлетворять граничным условиям для первых производных от искомой функции. Эти условия выполнить, особенно для областей неканонической формы с криволинейными граничными линиями, довольно трудно, часто не возможно. Использование же функций (12) или (14) не требует задания значений производных от искомым функций на границах областей. Причем, значения производных на границах области должны задаваться с большой точностью. Как показывают численные эксперименты, пяти процентная погрешность в задании первых производных на границе может привести к тридцати шести процентной погрешности во вторых производных от искомой функции. Кроме того, при использовании кубического сплайна сетка разбиения должна быть сравнительно густой. Это, во-первых, приводит к необходимости задания

большой входной информации, во-вторых, система уравнений относительно неизвестных параметров может получиться при этом плохо обусловленной.

В таблице 3 представлены результаты аппроксимации функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi/2]$, полученные на основании предложенной в данной работе методики и с помощью кубической сплайн-функции. При этом в первом случае значение производной f'_b не задавалось.

Таблица 3

K=5		x=1.178		x= $\pi/2$	
Работа	f'_b	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
	-	0.383	-0.92	-0.002	-1.02
Сплайн	0	0.383	-0.925	0	-1.14
	0.01	0.38	-0.955	0.01	-0.929
	0.1	0.356	-1.16	0.1	-1.41
	$O(h^2)$	0.378	-0.961	0.015	-0.89
Точное	-	0.383	-0.924	0	-1

Количество точек аппроксимации выбиралось равным количеству членов в аппроксимирующей функции, т.е. $J=K$, значения функции задавались с равномерным шагом, $\varepsilon = 10^{-8}$.

В таблице 4 приводятся значения производных $f'(x)$, $f''(x)$ и их проценты расхождения от точных значений для функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$, вычисленные не в узловой точке $x_c = 0.942$. В столбцах таблицы I, II, III, IV представлены значения производных, подсчитанные с использованием различных интерполяционных функций по точным узловым значениям.

Таблица 4

	Точное		I	II	III	IV
$f'(x)$	0.588	0.588	0.559	0.604	0.422	0.608
		0%	6%	2.7%	28%	3.4%
$f''(x)$	-0.809	-0.808	-0.770	-0.925	-1.267	-0.951
		0.1%	4.8%	14%	57%	18%

Длина отрезка разбивалась на 10 равных интервалов. Значения вычислялись для середины второго интервала в точке x_c . Столбец I соответствует линейной интерполяции

$$f'_c = \frac{f'_2 + f'_3}{2}, \quad f''_c = \frac{f''_2 + f''_3}{2};$$

столбцы II и III – интерполяции с использованием функций формы метода конечных элементов в виде одномерных функций Эрмита:

$$f'(x) = f'_2 H_1(x) + f'_3 H_2(x) + f''_2 H_3(x) + f''_3 H_4(x), \quad f''(x) = [f'(x)]',$$

$f'(x) = [f_2 H_1(x) + f_2' H_2(x) + f_3 H_3(x) + f_3' H_4(x)]'$, $f''(x) = [f'(x)]'$,
где

$$H_1(x) = 1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3, \quad H_2(x) = \bar{x} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^3,$$

$$H_3(x) = 3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3, \quad H_4(x) = \bar{x}^3 - \bar{x}^2, \quad \bar{x} = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}.$$

Здесь $x_2 = 0.628$, $x_3 = 1.256$ - граничные точки второго интервала, $f_2' = 0.809$, $f_2'' = -0.588$, $f_3' = 0.309$, $f_3'' = -0.951$. Столбец IV соответствует интерполяции кубическим сплайном.

Результаты аппроксимации эллипсоидальной поверхности, заданной в параметрическом виде

$$x = 50 \cdot \sin \beta_1 \cdot \cos \beta_2,$$

$$y = 60 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2, \quad 0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq \pi/2,$$

$$z = 60 \cdot \cos \beta_1,$$

представлены в таблице 5.

Таблица 5

α_2	α_1	A_1		A_2		R_1		R_2	
		Точ- ное		Точ- ное		Точ- ное		Точ- ное	
0.78 5	0.02	60	60	1.2	1.2	50	49.8	53.3	50.7
	0.408	59.2	59.2	23.5	23.5	53.1	51	54.4	50
	0.795	57.2	57.2	41	41.2	59.5	59.9	56.5	55.2
	1.18	55.2	55.2	51.7	51.9	65.2	64.9	58.3	60.1
	1.57	54.3	54.3	55.2	55.3	67.3	69.9	58.9	61.7

За поверхность отсчета принята сфера

$$x = 50 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2,$$

$$y = 50 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2, \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi/2.$$

$$z = 50 \cdot \cos \alpha_1,$$

Значения функции задавались на равномерной сетке 5×5 в точках с координатами: $\alpha_1 = 0.262, 0.524, 0.785, 1.05, 1.31$, $\alpha_2 = 0, 0.393, 0.785, 1.18, 1.57$. Выполнялись граничные условия $\psi_2 = 0$ при $\alpha_1 = 1.57$; $\psi_1 = 0$ при $\alpha_2 = 0, \alpha_2 = 1.57$. Для весовых коэффициентов принимались значения $p_j = 12, j = \overline{1, J}, p = 6$. Полагалось $\varepsilon = 0.15 \cdot 10^{-3}$.

При использовании функционалов (11) и (13) первые производные от искомой функции аппроксимируются самостоятельно. Это значительно упрощает решение задач, особенно для областей с криволинейными границами,

когда требуется удовлетворить граничным условиям для первых производных от искомой функции. Как было отмечено выше, эти условия при использовании предложенного метода можно и не выполнять. Однако в некоторых случаях выполнение этих условий приводит к уточнению решения.

В третьей главе на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями, предложенными в первой главе, разрабатывается математическая модель деформированного состояния составных оболочек.

Рассмотрим тонкостенную составную конструкцию, элементами которой являются тонкие оболочки, жестко соединенные между собой по линиям контактов (рис.3).

Данная конструкция разбивается на подобласти Ω_k таким образом, чтобы они имели однородную структуру, гладкую срединную поверхность и гладкие граничные линии. Линии контактов оболочек с различными механическими свойствами и линии разрывов гладкости оболочек должны лежать на граничных линиях подобластей.

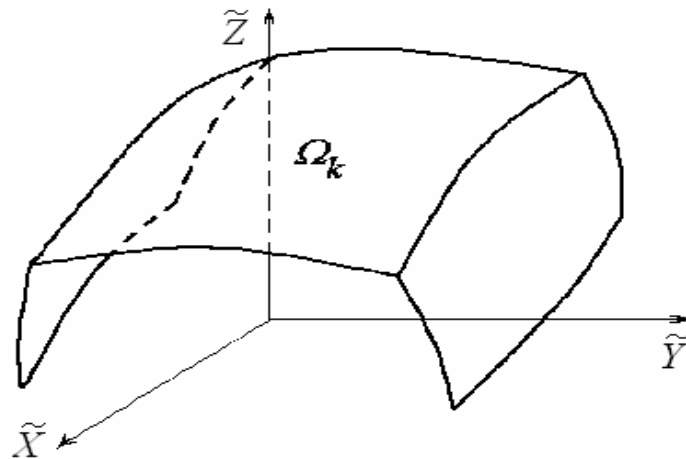


Рис.3

В вариационное уравнение Лагранжа добавляется дополнительное слагаемое, в результате чего данное уравнение записывается так:

$$\delta E^* = \sum_{k=1}^K \delta E_k^*(U) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} (\delta \Pi_k - \delta' W_k + \lambda_k \delta \Phi_k) d\Omega = 0, \quad (15)$$

где $U = \{u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}^T$ - вектор перемещений и углов поворота подобласти Ω_k , заданный в локальной системе координат; ψ_3 - средний поворот окрестности рассматриваемой точки срединной поверхности оболочки вокруг нормали; λ_k - постоянные коэффициенты;

$$\psi_3 = \frac{1}{2A_1A_2} \left(\frac{\partial A_2 u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 u_1}{\partial \alpha_2} \right). \quad (16)$$

Дополнительное слагаемое представляется в виде:

$$\Phi_k = \left[\Psi_3 - \frac{1}{2A_1A_2} \left(\frac{\partial A_2 u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 u_1}{\partial \alpha_2} \right) \right]^2. \quad (17)$$

Коэффициенты λ_k задаются в пределах: $\lambda_k = (0.01 \div 0.001) B_k$, где B_k - жесткость на изгиб подобласти Ω_k оболочки.

В качестве искомой функции выбирается вектор компонентов перемещений и углов поворота $\tilde{U} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}^T$ срединной поверхности оболочки, заданный в глобальной системе координат $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$, который представляется в виде:

$$\tilde{U} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \tilde{D}_{mn}^k t_m(\beta_1) t_n(\beta_2), \quad (18)$$

где $\tilde{D}_{mn}^k = \{\tilde{D}_{mn1}^k, \tilde{D}_{mn2}^k, \tilde{D}_{mn3}^k, \tilde{D}_{mn4}^k, \tilde{D}_{mn5}^k, \tilde{D}_{mn6}^k\}^T$ - вектор неизвестных постоянных.

Компоненты перемещения в локальной системе координат определяются через компоненты перемещения в глобальной системе координат:

$$U = [C^*] \tilde{U}, \quad (19)$$

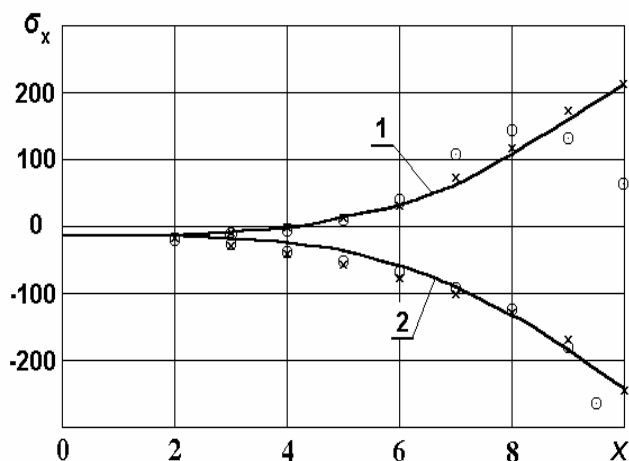
$$\text{где } [C^*] = \begin{bmatrix} [C] & 0 \\ 0 & [C] \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad C_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$$

направляющие косинусы локальной системы координат в глобальной системе координат.

Использование предложенного метода обеспечивает как непрерывность самой составной оболочки на линиях сопряжения, так и непрерывность искомых функций на этих линиях. В результате этого обеспечивается высокая точность решения как во внутренних точках оболочки, так и вблизи линий излома срединной поверхности оболочки.

На рис.4 приводятся напряжения на нагруженной (кривая 1) и ненагруженной (кривая 2) поверхностях цилиндрической части

цилиндрической оболочки, сопряженной с круговым фланцем (рис.5).



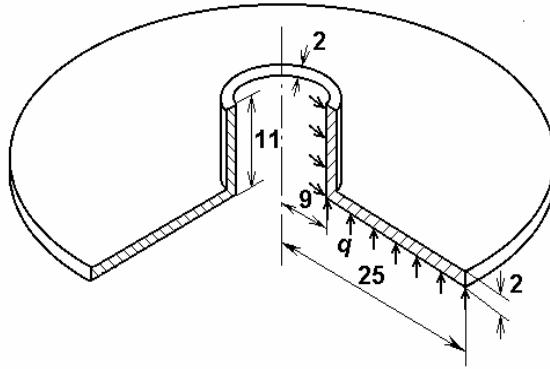


Рис.4.

Рис.5

На конструкцию действует внутреннее давление интенсивности q , на свободных краях ставятся условия равенства нулю нормальных к краям тангенциальных смещений. Координата x направлена вдоль образующей цилиндра от свободного края. Расчеты произведены для следующих числовых данных: $E=200$ ГПа, $\nu = 0.3$, $q = 0.1$ МПа. Крестиками показаны значения напряжений, приведенные в работе Савулы Я. Г., кружечками – результаты, полученные с помощью биквадратичных изопараметрических конечных элементов, построенных на основе уравнений теории упругости.

Показана возможность использования данной методики для расчета оболочек с повреждениями типа «вмятин», которые могут оказать существенное влияние на прочностные свойства конструкции. Оболочку с дефектом можно рассматривать как составную конструкцию, состоящую из исходной оболочки с вырезом в виде вмятины и оболочки-вмятины. Причем, если оболочка без дефектов имела первоначально каноническую форму, то при наличии дефектов она становится составной конструкцией сложной формы, т.к. во-первых, граничная линия вмятины может иметь криволинейную форму, во-вторых, срединная поверхность вмятины может иметь сложную геометрию.

Если размеры вмятины малы по сравнению с размерами оболочки, то для получения приемлемых результатов на основе метода конечных элементов потребуется в окрестности вмятины и в самой вмятине использовать достаточно мелкую сетку, сопоставимую с размерами вмятины. Кроме того, если вмятина имеет криволинейные границы, то возникает необходимость в использовании криволинейных конечных элементов. При этом граничные линии должны быть аппроксимированы с достаточно большой точностью, т.к. вид граничной линии существенно влияет на распределение напряжений в оболочке.

Предложенный метод позволяет рассчитывать оболочки с дефектами, размеры вмятины которой могут быть достаточно малыми по сравнению с размерами оболочки. При этом не требуется разбиения срединной поверхности оболочки на большое количество подобластей.

В четвертой главе предлагается вариационный метод расчета стержневых систем, элементами которых являются криволинейные стержни.

Предположим, что стержневая система может быть разбита на стержневые элементы λ_i , оси которых описываются гладкими кривыми. В пределах элемента λ_i вектор перемещений V_i оси стержня представляется в виде:

$$V_i = \sum_{m=1}^M B_m^i t_m(\beta_i), \quad (20)$$

где B_m^i - вектор неизвестных постоянных; $\beta_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{i1}}{\alpha_{i2} - \alpha_{i1}}$; α_{i1}, α_{i2} -

координаты начала и конца оси стержня.

Если определить значения искомой функции в узловых точках, то получим $V_i(0) = B_1^i$, $V_i(1) = B_2^i$. Следовательно, коэффициенты B_1^i, B_2^i равны значениям вектора перемещений соответственно в начальной и конечной точках оси стержня, т.е. узловым значениям. Это обстоятельство позволяет легко осуществлять стыковку стержней и удовлетворять геометрическим граничным условиям. Так, если положить $B_1^i = B_2^k$, то будет выполнено условие стыковки начала i -го стержня с концом k -го стержня. Чтобы удовлетворить, например, граничному условию жесткого защемления на конце i -го стержня, т.е. условию $V_i(0) = 0$, следует положить $B_1^i = 0$.

Достоинство метода заключается в том, что он не требует разбиения стержня на большое количество элементов, позволяет при формировании локальной матрицы жесткости путем статической конденсации оставлять для каждого элемента λ_i только по два параметра B_1^i, B_2^i вне зависимости от порядка аппроксимирующей функции.

Проводятся исследования в области расчета оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Предполагается, что срединная поверхность оболочки может быть разбита на подобласти вида Ω_k таким образом, чтобы ребра жесткости проходили вдоль граничных линий подобластей. Ребра жесткости жестко контактируют с оболочкой и их оси относительно граничных линий подобластей имеют эксцентриситеты, соизмеримые с размерами поперечных сечений ребер и толщиной оболочки. На основании принятых гипотез перемещения оси ребра определяются через перемещения соответствующей граничной линии подобласти Ω_k :

$$v_1 = u_1^* + h_2 \psi_2^* - \eta \psi_3^* + z_2 \varphi_2,$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= u_2^* - h_2 \psi_1^* - z_2 \varphi_1, \\
v_3 &= w^* + \eta \psi_1^*, \\
\varphi_3 &= \psi_3^*,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $V = \{v_1, v_2, v_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$ - вектор компонентов перемещения и углов поворота оси ребра, $U^* = \{u_1^*, u_2^*, w^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*\}^T$ - вектор компонентов перемещения и углов поворота точек оболочки на граничной линии подобласти Ω_k , который задается в системе координат β, η, z , связанной с осью ребра; h - толщина оболочки; $h_2 = h/2$, $z_2 = z - h_2$.

В этих формулах не учитывается связь между углами поворота φ_1, φ_2 ребра и соответствующими углами поворота ψ_1^*, ψ_2^* оболочки. Эти углы отличаются между собой на углы, вызванные деформациями сдвига. Если деформации от сдвига сравнимы с соответствующими деформациями от изгиба или кручения, то эти углы необходимо рассматривать отдельно. Если же углы сдвига граничной линии подобласти оболочки и ребра малы по сравнению с углами поворота, вызванными изгибом или кручением, то можно положить

$$\varphi_1 = \psi_1^*, \quad \varphi_2 = \psi_2^*. \tag{22}$$

В последнем случае задачу расчета оболочки, подкрепленной ребрами жесткости, можно свести только к оболочке с некоторыми обобщенными характеристиками. Если условия (22) не выполняются, то углы поворота φ_1, φ_2 аппроксимируются отдельно. В этом случае при формировании глобальной матрицы жесткости путем статической конденсации также можно освободиться от параметров, определяющих углы поворота φ_1, φ_2 , и свести задачу к оболочке.

Численные результаты показывают, что предложенный метод позволяет на малом количестве элементов получать хорошие результаты как в областях оболочки удаленных от ребер, так и непосредственно в зонах, прилегающих к ним.

Разрабатываются математические модели совместного деформирования оболочек и стержней, которые могут контактировать как по линиям (ребра жесткости), так и в точках. Ребра жесткости могут проходить вдоль граничных линий подобластей Ω_k , контакты стержней с оболочкой могут быть в угловых точках подобластей.

Вариационное уравнение Лагранжа в этом случае принимает вид:

$$\delta E = \sum_{k=1}^K \left[\delta E_k(U_k) + \sum_{j=1}^4 \delta E_{kj}(V_{kj}) \right] + \sum_{i=1}^I \delta E_{si}(V_i) = 0, \quad (23)$$

где E_k - полная энергия подобласти Ω_k ; E_{kj} - полная энергия ребра жесткости λ_{kj} ; E_{si} - полная энергия стержня λ_i ; U_k - вектор перемещений и углов поворота срединной поверхности подобласти Ω_k , заданный в системе координат α_1, α_2, ξ ; V_{kj} - вектор перемещений и углов поворота ребра жесткости λ_{kj} , заданный в системе координат, связанной с осью ребра; V_i - вектор перемещений и углов поворота стержня λ_i , заданный в системе координат, связанной с главными осями инерции поперечного сечения стержня.

Если вдоль каких-то граничных линий подобластей нет ребер жесткости, то соответствующие слагаемые исключаются из уравнения (23).

За искомые неизвестные принимаются компоненты перемещений и углов поворота подобластей оболочек и стержней, заданные в глобальной системе координат:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D_{mn}^k t_m(\beta_1) t_n(\beta_2), \\ \tilde{V}_{kj} &= \sum_{m=1}^M B_m^{kj} t_m(\beta_j^*), \\ \tilde{V}_i &= \sum_{m=1}^M B_m^i t_m(\beta^i), \end{aligned} \quad (24)$$

где D_{mn}^k , B_m^{kj} , B_m^i - вектора неизвестных постоянных.

Решение таких задач в прямой постановке для сложных тонкостенных конструкций вызывает большие трудности, т.к. она сводится к системам уравнений больших порядков. В связи с этим является целесообразным при формировании глобальной матрицы жесткости освободиться от некоторых степеней свободы конструкции и свести задачу к последовательному решению систем уравнений меньших порядков. Показывается, что в зависимости от поставленной задачи для уменьшения количества степеней свободы конструкции в пределах подобластей Ω_k можно исключать из системы уравнений параметры, определяющие перемещения или стержневых элементов или оболочек. Это позволяет свести задачу или к оболочке, или к стержневой системе с некоторыми обобщенными характеристиками, т.е. позволяет создавать элементы типа суперэлементов.

Составлены пакеты программ и представлены результаты расчетов стержневых систем, оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, и оболочечно-стержневых конструкций.

В пятой главе предлагается вариационный метод расчета толстых оболочек, основанный на использовании для описания их напряженно-деформированного состояния теории оболочек средней толщины с учетом обжатия. При учете обжатия не учитываются поперечные деформации, возникающие от действия напряжений обжатия, модуль упругости в этом направлении вводится с поправочным коэффициентом.

Толстая оболочка толщиной h разбивается на I^* слоев поверхностями эквидистантными к некоторой поверхности приведения (рис.6).

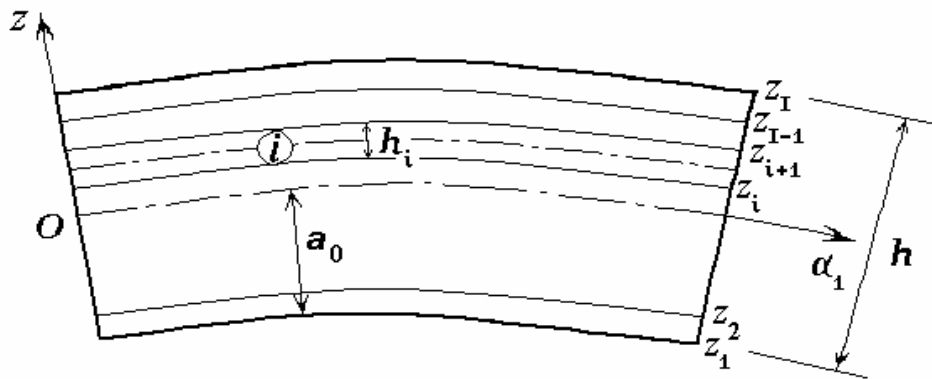


Рис.6

Толщины слоев выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\sqrt{\frac{h_i}{R_i}} \ll 1, \quad i = \overline{1, I^*}, \quad (25)$$

где h_i, R_i - соответственно толщина и наименьший радиус кривизны i -го слоя.

Следовательно, геометрия слоев такова, что они удовлетворяют условиям оболочек средней толщины и для описания их напряженно-деформированного состояния можно использовать теорию оболочек типа Тимошенко.

Искомые функции по толщине оболочки представляются в виде кусочно-линейных функций:

$$U^{(i)} = \frac{z - z_i}{h_i} u_{i+1} - \frac{z - z_{i+1}}{h_i} u_i, \quad i = \overline{1, I^*}, \quad (26)$$

где $U^{(i)} = \{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}\}^T$ ($i = \overline{1, I^*}$) - вектор перемещения оболочки в пределах i -го слоя; $u_i = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}\}^T$ ($i = \overline{1, I}$) - вектор перемещения поверхности контакта слоев; z_i - координата нижней поверхности i -го слоя;

$I = I^* + 1$. Координата z отсчитывается от поверхности приведения, заданной расстоянием a_0 от нижней поверхности оболочки.

Напряжения в оболочке определяются по формулам:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & B\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B\nu & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}, \quad (27)$$

где E , G , ν - соответственно модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент

Пуассона, $B = \frac{E}{1-\nu^2}$, δ - постоянный поправочный коэффициент.

Потенциальная энергия оболочки при этом записывается так:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left[B(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}) + G(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2) + E\delta\varepsilon_{33}^2 \right] dV, \quad (28)$$

где V – объем, занимаемый оболочкой.

Если в формуле (28) положить $\delta = 0$, то получится потенциальная энергия тонкой оболочки без учета обжатия.

С учетом введенных предположений вариационное уравнение Лагранжа принимает вид:

$$\delta \mathcal{E}(u_1, u_2, \dots, u_I) = 0,$$

т.е. полная энергия записывается через перемещения u_i поверхностей контактов слоев, а также нижней и верхней поверхностей оболочки.

Поверхность приведения разбивается на подобласти Ω_k , в соответствии с которыми поверхности контактов также разбиваются на подобласти Ω_{ki} . В пределах подобластей Ω_{ki} перемещения u_i аппроксимируются соотношениями вида (2).

В пределах подобластей Ω_{ki} для каждой поверхности контакта слоев можно исключать параметры, определяющие перемещения внутренних точек подобластей. В результате этого задача сведется к системе уравнений, в которой останутся только параметры, определяющие перемещения точек, лежащих на граничных поверхностях контактов подобластей Ω_k . Тем самым создается элемент типа суперэлемента для толстой оболочки.

Предложенный метод используется также для моделирования деформаций многослойных оболочек. Предполагается, что слои оболочки ортотропные с различными направлениями ортотропии и для них выполняются условия (25), т.е. слои удовлетворяют условиям, определяющим оболочки средней толщины. Если для какого-то слоя условие (25) не выполняется, то он в свою очередь разбивается на несколько слоев, каждый из которых рассматривается отдельно.

Численные эксперименты показывают, что, если не учитывать обжатие оболочки (в формуле (27) положить $\delta = 0$), то данный метод не дает верного решения, т.к. из-за тонкости слоев происходит эффект «заклинивания» решения. Если для слоев использовать выражение для потенциальной энергии, соответствующее трехмерному телу, то из-за тонкости слоев также получается неустойчивое решение. Предложенный метод позволяет рассчитывать по единой методике как достаточно толстые оболочки, так и сравнительно тонкие оболочки. Механические характеристики слоев могут при этом существенно различаться. Использование поправочного коэффициента δ позволяет уточнять решение задачи. В большинстве рассмотренных примеров наиболее точные результаты были получены при значениях $\delta = 0.1 \div 0.2$. Одним из критериев выбора коэффициента δ является характер распределения напряжений обжатия по толщине оболочки.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. В работе построены аппроксимирующие функции с конечными носителями произвольной степени аппроксимации. Отличительная особенность этих функций заключается в том, что в пределах некоторой криволинейной четырехугольной или треугольной подобласти в аппроксимирующих функциях, путем соответствующего преобразования системы координат и выбора этих функций, разделяются параметры, определяющие искомые функции внутри подобласти и на ее границах. Предложенные функции с конечными носителями удовлетворяют условиям согласованности и полноты.

2. С использованием данных функций на основе вариационного метода решения задач определяются напряженно-деформированные состояния тонких оболочек сложной формы в плане, составных оболочек, стержневых систем, оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, и оболочечно-стержневых конструкций.

При расчете сложных оболочечно-стержневых конструкций показана возможность освобождения от «лишних» степеней свободы, что позволяет создавать элементы типа суперэлементов и существенно уменьшать порядок систем уравнений, к которым сводятся решения поставленных задач.

Рассмотренные задачи показывают, что предложенный метод имеет широкую область применения, является достаточно универсальным и простым в численной реализации.

3. Предложены алгоритмы построения двумерных и одномерных сглаживающих функций, заданных совокупностью точек. Для построения этих функций используется функционал, содержащий только первые производные от искомым функций, и аппроксимирующие функции с конечными носителями, введенными в данной работе для расчета тонких оболочек.

4. Численные эксперименты показывают, что при использовании предложенного метода построения сглаживающих функций:

- на малом количестве входной информации получаются достаточно хорошие результаты для искомым функций и их производных;
- точность решения одинакова как в узловых точках, так и в точках, находящихся между ними;
- для аппроксимирующих функций не требуется задания значений производных функций на границах области, что значительно облегчает подготовку входных данных при параметризации срединной поверхности оболочек сложной формы;
- в случае необходимости довольно легко выполнить граничные условия, как для самой аппроксимирующей функции, так и для её первой производной.

5. Разработан вариационный метод расчета толстых оболочек, основанный на разбиении оболочки на слои и использовании для описания напряженно-деформированного состояния слоев уравнений теории оболочек средней толщины с учетом обжатия.

При учете обжатия в потенциальную энергию деформации вводится слагаемое с некоторым поправочным коэффициентом, которое рассматривает деформацию в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности оболочки, как линейное напряженное состояние.

Показана возможность использования предложенного метода для расчета многослойных оболочек.

6. На основе изложенных в работе методов составлены пакеты компьютерных программ, позволяющие производить расчеты тонких оболочек, криволинейных стержней, составных оболочек, оболочечно-стержневых конструкций, толстых однородных и многослойных оболочек.

7. Анализ результатов численных исследований показывает:

- при использовании предложенного в работе метода для расчета тонких оболочек, находящихся в области практического применения, не возникают такие явления, как «заклинивание» решения, образование «механизмов» и т.д.;
- для достижения необходимой точности решения задач требуется малое количество элементов;
- при расчете оболочек размеры подобластей, на которые разбивается срединная поверхность оболочки, могут существенно различаться, что позволяет производить расчеты оболочек с небольшими вмятинами или инородными включениями;

- предложенный метод позволяет рассматривать подобласти, у которых один геометрический размер значительно меньше другого, что дает возможность рассчитывать оболочки с тонкими инородными включениями, оболочки с «вырождающейся» областью, позволяет моделировать различные граничные условия.

- введение поправочного коэффициента при расчете толстых оболочек позволяет уточнять решение и получать решения для довольно толстых оболочек.

Основные положения диссертации опубликованы в статьях:

1. Хайруллин Ф. С. Об одном подходе к расчету пластин сложной формы // Статика и динамика элементов конструкций сложной формы: Межвузовский сборник - Набережные Челны, 1990. - С. 112-117.

2. Хайруллин Ф. С. О методе расчета составных пластинчатых конструкций // Труды XV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1 - Казань, 1991. - С. 573 - 578.

3. Серазутдинов М. Н., Хайруллин Ф. С. Метод расчета криволинейных стержней // Известия вузов. Строительство и архитектура. - 1991. - №5. - С. 104 - 108.

4. Хайруллин Ф. С. О методе расчета составных тонкостенных конструкций // Известия вузов. Машиностроение. - 1992, № 1 - 3. - С. 20 - 23.

5. Хайруллин Ф. С. О численной реализации одного метода расчета тонкостенных конструкций // Расчет пластин и оболочек В химическом машиностроении. Межвуз. сб. научных трудов. - Казань: КГТУ, 1993. - С. 81 - 85.

6. Хайруллин Ф. С. О некоторых особенностях реализации одного метода расчета тонкостенных конструкций // Труды XVI Международной конференции по теории оболочек и пластин. - Нижний Новгород, 1994. - С. 242 - 246.

7. Хайруллин Ф. С. Об одном методе расчета тонкостенных конструкций сложной формы в плане // Труды XVII Международной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 2. - Казань, 1996. - С. 203 - 206.

8. Хайруллин Ф. С. Метод расчета тонких оболочек сложной формы // Известия РАН. Механика твердого тела. - 1998, № 3. - С. 30 - 33.

9. Хайруллин Ф. С. О расчете оболочечно-стержневых конструкций // Сборник докладов XIX Международной конференции «Механика оболочек и пластин». - Нижний Новгород, 1999. - С. 196 - 200.

10. Хайруллин Ф. С. О методе расчета рамно-оболочечных конструкций // Труды XI межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч.1. - Самара, 2001. - С. 188 - 191.

11. Хайруллин Ф. С. О расчете тонких оболочек с ребрами жесткости // Труды XII межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч.1. - Самара, 2002. - С. 190 - 193.
12. Хайруллин Ф. С. О расчете трехслойных оболочек с очень мягким заполнителем // Сборник докладов XIX Международной конференции «Механика оболочек и пластин». - Нижний Новгород, 2002. - С. 304 - 308.
13. Хайруллин Ф. С. Метод расчета стержневых конструкций, несущих тонкостенные перекрытия // Известия вузов. Строительство. - 2002, № 1-2. - С. 76 - 80.
14. Хайруллин Ф. С., Серазутдинов М. Н. О расчете тонкостенных конструкций с дефектами как оболочек сложной формы // Проектирование и исследование технических систем. Вып. 1: Межвузовский сборник. - Набережные Челны, 2002. - С. 17- 20.
15. Хайруллин Ф. С. О построении аппроксимирующих функций для граничных линий оболочек сложной формы // Труды XIII межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч.1. - Самара, 2003. - С. 210 - 212.
16. Хайруллин Ф. С., Серазутдинов М. Н. Об использовании конечных элементов высокой степени аппроксимации // Труды XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». - С-Петербург, 2003. - С. 184 – 189.
17. Хайруллин Ф. С. Об одном методе расчета толстых оболочек // Сборник трудов XVIII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях». – Казань, 2005. – С. 27 – 28.
18. Хайруллин Ф. С. Об использовании теории оболочек типа Тимошенко для расчета толстых оболочек // Известия вузов. Авиационная техника. - Казань, 2005, № 3. - С. 67 - 69.
19. Хайруллин Ф. С., Серазутдинов М. Н. Метод параметризации срединной поверхности тонкостенного элемента конструкции. // Известия вузов. Авиационная техника. - Казань, 2006, №4. - С. 14-16.